• ΝΔΟ $f(\omega)=\omega\cdot\log\omega$, $\omega>0$ είναι κυρτή. Από αυτό να συμπεράνεται ότι $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$ με $x+y=1 \Rightarrow x^x\cdot y^y\geq \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

$$f'(\omega)=\log\omega+1$$

$f''(x)=\frac{1}{\omega}>0$ άρα η $f'\uparrow$ και f κυρτή

Τότε

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f(x)+f(y)\right]\Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y}{2}\cdot\log\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[x\cdot\log x+y\log y\right]\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{2}\leq\cancel{\frac{1}{2}}\log\left(x^x\cdot y^y\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\leq x^x\cdot y^y$$

• Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και 2 φορές παραγωγ. στο (α,β) με $f''(x)>0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$. ΝΔΟ $f(x)\leq 0$, $\forall x\in(\alpha,\beta)$

ΛΥΣΗ

1) f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

2) f παραγωγ. στο (α,β)

3) $f(\alpha)=f(\beta)=0$

Απο Θ. Rolle $\exists c\in(\alpha,\beta)$: $f'(c)=0$

$$f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow \Rightarrow \begin{cases} f'(x)<0\ ,\ \alpha<x<c \Rightarrow f\downarrow \Rightarrow x>\alpha \Rightarrow f(x)<0 \\ f'(x)>0\ ,\ c<x<\beta \Rightarrow f\uparrow \Rightarrow x<\beta \Rightarrow f(x)<0 \end{cases} \quad \forall x\in(\alpha,\beta)$$

Και αφου $f(\alpha)=f(\beta)=0$ τοτε
$f(x)\leq 0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ και $0\leq x\leq 1$ ΝΔΟ

$$\alpha^x\beta^{1-x}\leq \alpha x+(1-x)\beta$$

ΛΥΣΗ

$f(x)=\alpha^x\cdot\beta^{1-x}-\alpha x-(1-x)\beta$, $\forall x\in[0,1]$

$$f'(x)=\alpha^x\cdot\log\alpha\cdot\beta^{1-x}-\alpha^x\cdot\beta^{1-x}\cdot\log\beta-\alpha+\beta=$$
$$=\alpha^x\cdot\beta^{1-x}\log\frac{\alpha}{\beta}-\alpha+\beta$$

$$f''(x)=\alpha^x\cdot\beta^{1-x}\left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)^2>0$$

Αρα $f'\uparrow$ και f είναι $\smile$

$f(0)=0$, $f(1)=0$

Αρα, είμαι στην προηγούμενη περίπτωση και έχουμε ότι $f(x)\leq 0$, $\forall x\in[0,1]$

• Δίνεται $f(x)=\begin{cases}(x^2)^x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

α) ΝΔΟ η f συνεχής

β) Νβ τα ακρότατα και τα σκ.

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί νδο $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}(x^2)^x=\lim_{x\to 0} e^{x\log(x^2)}=e^{\lim_{x\to 0} x\log(x^2)} \quad ①$$

• $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}2x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-2x=0$$

Αρα ① ισου με 1. αρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

β)

• $x\neq 0$, $f'(x)=\left[(x^2)^x\right]'=\left(e^{x\log(x^2)}\right)'=e^{x\log(x^2)}\left(x\log(x^2)\right)'=$

$$=e^{x\log(x^2)}\left(\log(x^2)+\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x^2}}2\cancel{x}\right)=e^{x\log(x^2)}\left(\log(x^2)+2\right)$$

$$=f(x)\cdot\left(2\log|x|+2\right)$$

• $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\log(x^2)}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\left(e^{x\log(x^2)}(2\log|x|+2)\right)=$$

$=-\infty$ όχι παραγωγίσιμη στο 0

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{x\log(x^2)}\cdot 2\left(\log|x|+1\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log|x|=-1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{e}$$

Άρα, σε πινακα προσημου θα δούμε οτι

x	$-\infty$		$-1/e$		0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	o	$-$	‖	$-$	o	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			T.M				T.E		

$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e^2}\right)^{-1/e}$ $\qquad$ $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e^2}\right)^{1/e}$

$$f''(x) = f'(x)\cdot(2\log|x|+2) + f(x)\cdot(2\log|x|+2)' =$$
$$= (x^2)^x\cdot(2\log|x|+2)^2 + (x^2)^x\cdot\frac{2}{x}$$

Τα Σ.Κ είναι οι λύσεις αυτής της εξίσωσης

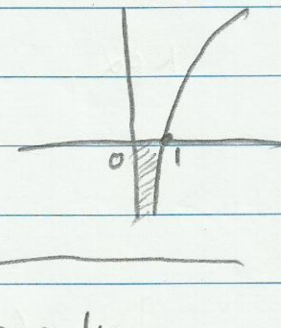
$$f''(x) = 0 \Rightarrow (x^2)^x\left((2\log|x|+2)^2 + \frac{2}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2\log|x|+2)^2 + \frac{2}{x} = 0$$

ΔΕΝ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΤΑ ΒΡΟΥΜΕ! (ΜΟΝΟ ΓΡΑΦΙΚΑ)

• ΝΔΟ $\quad x^a\cdot|\log x| \le \frac{1}{a\cdot e}, \quad 0<x<1, \quad a>0$

ΛΥΣΗ

$f(x) = x^a\cdot|\log x| \le M, \quad \forall x\in(0,1)$



$f(x) = x^\alpha\cdot|\log x| = -x^\alpha\cdot\log x, \quad \forall x\in(0,1)$

$f'(x) = -\alpha x^{\alpha-1}\cdot\log x - x^a\cdot\frac{1}{x} = -x^{\alpha-1}\cdot(\alpha\cdot\log x + 1)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \log x = -\frac{1}{\alpha} \Rightarrow x = e^{-1/\alpha}$

x	0		$e^{-1/a}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		↗		↘	
			T.M		

Είναι ολικό; Θα πάρουμε

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^a\log x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\log x}{\frac{1}{x^a}}\right) = 0$

• $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(-x^\alpha\log x) = 0$

$f(e^{-1/a}) = -(e^{-1})\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a\cdot e}$

Άρα, λόγου

$$f(e^{-\frac{1}{a}}) = \frac{1}{\alpha\cdot e} > 0 \quad \text{άρα ολικό Μέγιστο}$$

Συνεπώς

$$f(x) \le f(e^{-1/a}) \Rightarrow x^\alpha|\log x| \le \frac{1}{a e}, \quad \forall x\in(0,1), \ \alpha>0$$

• Δίνεται $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot \log x}{x-1}, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

ΝΔΟ $\exists \delta>0$ με $0<\delta<1$

τέτοιο ώστε $f'(x)>0$, $\forall x \in (1-\delta, 1]$

Λύση

$$f'(x) = \frac{(\log x+1)(x-1)-(x\log x)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{x\log x}-\log x+x-1-\cancel{x\log x}}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-\log x-1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x\log x}{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x\log x+1-x}{(x-1)^2} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\log x+\cancel{1}-\cancel{1}}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = \frac{1}{2}$$

Αξιοσημείωτα όρια

Άρα, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1-\log x}{(x-1)^2}, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\log x}{(x-1)^2} \overset{(\frac{0}{0})}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{2x\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{2} = f'(1)$$

Άρα $\left.\begin{array}{l} f' \text{ συνεχής στο } x_0=1 \\ \text{και } f'(1)=\frac{1}{2}>0 \end{array}\right\}$ $f'(x)>0$ $\forall x\in(1-\delta, 1]$